Über die Integration von Differentialgleichungen höherer Grade*

Leonhard Euler

§1 Obwohl, um Differentialgleichungen ersten Grades zu lösen, schon viele Methoden erdacht worden sind, und auf diese Aufgabe die größten Geometer Arbeit und Eifer verwendet haben, haben sie dennoch immer noch wenig an Hilfsmitteln vorgetragen, um Differentialgleichungen höherer Grade zu behandeln und sie entweder zu konstruieren oder zu integrieren. Differentialgleichungen zweiten Grades pflegen nämlich so aufgelöst zu werden, dass sie durch geeignete Substitution auf Gleichungen ersten Grades zurückgeführt werden und bei dieser Aufgabe habe ich vor vielen Jahren einige Hilfsmittel erdacht, mit deren Hilfe unzählige Differentialgleichungen zweiten Grades auf den ersten Grad herabgesetzt werden und daher sogar entweder konstruiert oder integriert werden können. Aber bei Differentialgleichungen dritten oder höheren Grades nützen ähnliche Kunstgriffe, durch die sie auf einen geringeren Grad gebracht werden können, wenig und meistens gar nichts, weil auf diese Weise zu komplizierten Differentialgleichungen zweiten Grades oder sogar höheren Grades gelangt wird, sodass sie in keinster Weise weiter behandelt werden können. Deswegen wird bei dieser Aufgabe die Methode, die ich hier erörtern werde, nicht wenig an Nutzen bringen, mit derer Hilfe viele Differentialgleichungen höherer Grade ohne vorherige Reduktion

*Originaltitel: „De integratione aequationum differentialium altiorum graduum", erstmals publiziert in „*Miscellanea Berolinensia* 7, 1743, pp. 193-242", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 22, pp. 108 - 149", Eneström-Nummer E62, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" auf geringere Grade sofort integriert werden und die Integralgleichungen in endlichen Termen beschafft werden können.

§2 Es seien y und x Variablen, in denen die Differentialgleichung irgendeines Grades enthalten ist, in welcher das Differential $\mathrm{d}x$ als Konstante angenommen sei; und die andere Variable y habe mit ihren Differentialen $\mathrm{d}y$, $\mathrm{dd}y$, d^3y, etc in den einzelnen Termen eine Dimension, sodass die Gleichung, von welchem Grad auch immer sie schließlich ist, die folgende Form annimmt

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{E\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} + \frac{F\mathrm{d}^5y}{\mathrm{d}x^5} + \text{etc},$$

in welcher die Buchstaben A, B, C, D, etc Größen bezeichnen, die entweder konstant oder die andere Variable x irgendwie involvieren. Es ist aber klar, dass diese Gleichung sich sehr weit erstreckt; nicht nur ist sie wegen der unbestimmten Koeffizienten A, B, C, D, etc, welche wir zugleich als irgendwelche Funktionen von x angenommen haben, besonders allgemein, sondern sie umfasst auch alle Differentialgleichungen irgendeines Grades in sich. Diese Differentialgleichung, in welchen Fällen sie eine Integration zulässt, werde ich also in dieser Abhandlung entwickeln.

§3 Zuerst ist freilich klar, dass die vollständige Integralgleichung, außer den konstanten Größen, die in der Differentialgleichung enthalten sind, so viele neue beliebige Konstanten in sich umfassen muss, von welchem Grad auch immer die vorgelegte Differentialgleichung war. Wenn wir daher nämlich setzen, dass die Differentialgleichung vom Grad n ist, sodass der letzte Term

$$\frac{N\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n}$$

ist, wird sie durch eine Integration auf den Grad $n-1$ zurückgeführt werden, durch zwei nacheinander ausgeführte Integrationen auf den Grad $n-2$, durch drei auf den Grad $n-3$ und so weiter. Daraus sieht man ein, dass man schließlich nach n Integrationen auf eine Integralgleichung in endlichen Termen ausgedrückt gelangt. Weil ja aber durch jede beliebige Integration eine beliebige Konstante in das Integral eingeht, ist klar, dass das vollständige Integral n beliebige Konstanten umfassen muss.

§4 Die vollständige Integralgleichung umfasst also so viele beliebige Konstanten in sich, wie der Exponent n Einheiten enthalten wird; und dieser Integralgleichung ist anzusehen sich genauso zu erstrecken wie die Differentialgleichung des Grades n, sodass kein für y angenommener endlicher Wert der Differentialgleichung genügen kann, der nicht auch in der vollständigen Integralgleichung enthalten ist. Wenn daher aber in dieser vollständigen Differentialgleichung eine oder mehrere jener beliebigen Konstanten nach Belieben bestimmt werden, dann wird man zwar eine genügende Gleichung haben, aber sie wird nicht weiter vollständig sein, sondern nur eine partikuläre Integralgleichung, die nicht alle möglichen Werte von y, die der Differentialgleichung genügen, in sich umfasst. Es muss also die vollständige Integralgleichung von der partikulären unterschieden werden; und wenn wir der Differentialgleichung vollkommen genügen wollen, muss die vollständige Integralgleichung gefunden werden.

§5 Um aber zu erkennen, ob die beschaffte Integralgleichung vollständig ist oder nicht, berechnet man aus dem Erwähnten leicht ein Kriterium. Zuerst muss sie nämlich der vorgelegten Differentialgleichung genügen, was passiert, während nach der Substitution die identische Gleichung resultiert; andernfalls wäre nämlich jene Gleichung nicht einmal eine Integralgleichung. Außerdem ist aber notwendig, dass die Integralgleichung so viele beliebige Konstanten enthält, von welchem Grad die vorgelegte Differentialgleichung war. Wenn nämlich weniger in ihr enthalten sind, dann wird die gegebene Integralgleichung nicht vollständig sein, sondern nur partikulär. Bei der Zählung der beliebigen Konstanten ist aber dafür zu sorgen, dass wir nicht durch die Anzahl der verschiedenen Buchstaben getäuscht werden und wir sie nicht für verschiedene Größen halten, die durch sich gegenseitig bestimmt werden.

§6 Um diesen Unterschied zwischen den vollständigen und unvollständigen Integralgleichungen besser zu verstehen, wird es förderlich sein, die Sache an einem Beispiel illustriert zu haben. Es sei also diese Differentialgleichung

$$aa\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = (aa + xx)\mathrm{d}x$$

vorgelegt, welcher klar ist dieser Wert $y = x$ zu genügen, der natürlich eingesetzt die identische Gleichung ergibt. Es ist also $y = x$ eine Integralgleichung, aber keineswegs eine vollständige, weil sie weder die Konstante a, die in der Differentialgleichung enthalten ist, noch zusätzlich eine andere beliebige

Konstante enthält wie es die Differentialgleichung ersten Grades erfordert. Der, wer diese Integralgleichung $y = x$ für das vollständige Integral dieser Differentialgleichung

$$aa\mathrm{d}y + yy\mathrm{d}x = (aa + xx)\mathrm{d}x$$

halten wollte, würde sich also vehement täuschen; die vollständige Integralgleichung ist nämlich

$$y = x + \frac{aab\mathrm{e}^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + b\int \mathrm{e}^{-\frac{xx}{aa}}\mathrm{d}x},$$

die durch das Setzen der beliebigen Konstante $b = 0$ natürlich das partikuläre Integral $y = x$ ergibt.

§7 Auf die gleiche Weise sehen wir, dass dieser Differenzen-Differentialgleichung

$$y = \frac{x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{ax\mathrm{dd}y}{ax^2}$$

diese endliche Gleichung $y = x$ genügt; sie ist aber weit entfernt, dass sie das vollständige Integral ist und die ganze Tragweite der Differenzen-Differentialgleichung erschöpft, weil ja die vollständige Integralgleichung außer der Konstante a zwei beliebige Größen enthalten muss. Wir sehen aber auch, dass diese Gleichung $y = nx$ genügt, die aber, weil sie eine Konstante n enthält, immer noch nur partikulär ist. Die vollständige Integralgleichung ist aber

$$y = nx + b\int \frac{e^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x}{xx},$$

die außer der Konstante a die zwei beliebigen Größen b und n enthält, wie es die Natur der Sache erfordert.

§8 Weil aber alle partikulären Integralgleichungen in der vollständigen enthalten sind, ist klar, dass die vollständige aus vielen partikulären Integralen besteht und das vollständige Integral wird sogar aus partikulären Integralen zusammengestellt werden. Oftmals ist es aber genauso schwer, aus irgendwelchen bekannten partikulären Integralen das vollständige, oder zumindest ein sich weiter erstreckendes, Integral zu berechnen wie dasselbe aus der

Differentialgleichung durch Integration zu finden. Aber in der Tat ist die Gleichung, die wir hier unternommen haben zu betrachten,

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc},$$

so beschaffen, dass aus zwei oder mehreren bekannten partikulären Werten von y leicht ein sich weiter erstreckender Wert, der natürlich alle Werte in sich umfasst, von y gebildet werden kann. Und auf diese Weise wird aus einer genügenden Anzahl an für y gefundenen partikulären Werte der vollständige Wert oder die vollständige Integralgleichung konstruiert werden können.

§9 Zuerst erkennt man aber, wenn p ein genügender Wert von y war, sodass $y = p$ ist, dass dann auch $y = \alpha p$ sein wird; denn wenn der Wert p anstelle von y eingesetzt

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \text{etc} = 0$$

ergibt, dann wird der Wert αp anstelle von p eingesetzt denselben verschwindenden Ausdruck bewirken. Und auf diese Weise kann eine beliebige Konstante α in die partikuläre Integralgleichung $y = p$ eingeführt werden. Wenn aber außerdem diese Gleichung $y = q$ der vorgelegten genügt, dann wird auf die gleiche Weise auch $y = \beta q$ genügen; aus diesen zwei partikulären Werten $y = \alpha p$ und $y = \beta q$ berechnet man diesen sich weiter erstreckenden Wert

$$y = \alpha p + \beta q.$$

Wenn nämlich der Ausdruck

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \text{etc}$$

gleich 0 gleichgesetzt wird, dann ist für αp wie βq anstelle von y gesetzt klar, dass derselbe Ausdruck gleich 0 werden muss, wenn $\alpha p + \beta q$ anstelle von y gesetzt wird.

§10 Wenn auf die gleiche Weise p, q, r, s, etc Funktionen solcher Art von x waren, dass sie einzeln getrennt anstelle von y eingesetzt den Ausdruck

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \text{etc}$$

verschwinden lassen, dann wird auch dieser Wert

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc}$$

anstelle von y eingesetzt denselben Ausdruck 0 werden lassen. Wenn daher p, q, r, s, etc partikuläre Werte von y waren, die aus der vorgelegten Gleichung zusammenkommen, dann wird aus diesen dieser sich viel weiter erstreckende Wert

$$y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc}$$

berechnet, der der vorgelegten Gleichung genauso genügt. Und dieser Wert wird daher vollständig sein, wenn sie so viele beliebige Konstanten α, β, γ, δ, etc vorgebracht haben, von welchem Grad die vorgelegte Differentialgleichung war. Wir haben also eine leichte Art erhalten, aus mehreren partikulären Werten von y ihren vollständigen Wert anzugeben, der ganz und gar alle Werte von y, die der Gleichung genügen, in sich umfasst; und so wird man eine in endlichen Termen vollständige Integralgleichung haben.

§11 Die ganze Aufgabe für das Finden des vollständigen Integrals der vorgelegten Gleichung

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^\mathrm{n}y}{dx^n}$$

geht also darauf zurück, dass wir die partikulären Werte finden, die für y eingesetzt die identische Gleichung ergeben. Es werden aber so viele partikuläre Werte solcher Art nötig sein, bis sie durch Sammeln von diesen auf die vorgeschriebene Weise so viele beliebige Konstanten zusammengetragen haben, wie der größte Exponent n Einheiten enthält. Wenn daher die einzelnen partikulären Gleichungen eine beliebige Konstante mit sich tragen, sind von der Zahl n Gleichungen von solcher Art erforderlich, um die vollständige Integralgleichung festzusetzen. Wenn aber eine gewisse dieser partikulären Gleichungen mehr als eine beliebige Konstante zur Folge hat, dann werden umso weniger Gleichungen nötig sein, um die vollständige aus ihnen zu berechnen.

§12 Es bezeichnen nun alle Buchstaben A, B, C, D, etc konstante Größen, so dass diese Differentialgleichung von Grad n integriert werden muss

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

Weil ja y mit seinen Differentialen überall eine Dimension wächst, wird gemäß meiner Methode, die in *Tomo III. Commentariorum Academiae Petropolitanae* gegeben wurde, diese Differentialgleichung um einen Grad herabgesenkt werden, wenn wir

$$y = \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x}$$

setzen, woher die einzelnen Differentiale von y

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x} p \\
\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} &= \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x} \left(pp + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right) \\
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x} \left(p^3 + \frac{3p\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}p}{\mathrm{d}x^2} \right) \\
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= \mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x} \left(p^4 + \frac{6pp\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{4p\mathrm{dd}p}{\mathrm{d}x^2} + \frac{3\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^3p}{\mathrm{d}x^3} \right) \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

sein werden, wenn diese Werte in die vorgelegte Gleichung eingesetzt werden, sie durch $\mathrm{e}^{\int p \mathrm{d}x}$ geteilt werden können wird, und dann wird eine Differentialgleichung vom Grad $n-1$ zurückbleiben.

§13 Hier ist aber zuerst klar, wenn man p konstant nimmt, sodass ihre Differentiale $\mathrm{d}p$, $\mathrm{dd}p$, d^3p, etc verschwinden, dass dann wegen der Konstanten A, B, C, D, etc die Variable x völlig aus der Gleichung herausgehen wird; und in dieser Annahme wird die folgende algebraische Gleichung entstehen

$$0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \cdots + Np^n,$$

aus der man, wenn irgendein Wert für p gefunden wird, zugleich die partikuläre Integralgleichung $y = \mathrm{e}^{px}$ haben wird, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt; es wird also auch, wie wir gesehen haben, diese Gleichung $y = \alpha \mathrm{e}^{px}$ genügen, sooft p eine konstante Größe und eine Wurzel diese algebraische Gleichung

$$0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \cdots + Np^n.$$

war.

§14 Wir haben also das Finden der partikulären Werte für die Variable y auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung von n Dimensionen geführt, welche wir in diese

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

einsetzen wollen, und die einzelnen Wurzeln oder Teiler dieser Gleichung werden entsprechend viele partikuläre Werte von y geben. Wenn nämlich $pz - q$ ein Teiler dieser Gleichung war, aus welcher $z = \frac{q}{p}$ entsteht, wird

$$y = \alpha \mathrm{e}^{\frac{qx}{p}}$$

sein; dieser partikuläre Wert enthält eine beliebige Konstante α. Weil aber jene algebraische Gleichung von n Dimensionen n Wurzeln oder Teiler enthält, werden daher auch n partikuläre Werte für y entstehen, die werden nämlich zusammengenommen den allgemeinen Wert für y geben; und dieser wird zugleich der vollständige Wert sein, weil er n beliebige Konstanten enthält; dies ist das Kriterium einer vollständigen Integralgleichung.

§15 Wenn also alle Wurzeln dieser algebraischen Gleichung von n Dimensionen reell waren, dann wird der vollständige Wert für y in reellen Termen ausgedrückt hervorgehen, und er wird das Aggregat von n Exponentialformeln dieser Gattung $\alpha \mathrm{e}^{\frac{qx}{p}}$ sein, und in diesem Fall wird das vollständige Integral einzig durch einen Logarithmus oder durch die Quadratur ausgedrückt werden können. Wenn daher aber einige jener Wurzeln jener algebraischen Gleichung imaginär waren, dann werden in das vollständige Integral imaginäre Exponentialformeln eingehen; diese werde ich unten lehren durch die Quadratur des Kreises zu konstruieren. Die hauptsächliche Schwierigkeit dreht sich darum, wann immer zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung einander gleich sind; dann wird nämlich wegen der vielen gleichen Exponentialformeln die Anzahl der beliebigen Konstanten vermindert und deswegen wird das gefundene Integral nicht weiter vollständig sein.

§16 Wir werden für jedes der beiden Übelstände Abhilfe schaffen, wenn wir die Verbindung zwischen der vorgelegten Differentialgleichung

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n}$$

und der algebraisch gebildeten Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

aufmerksamer betrachten. Wie nämlich aus dieser jene entsteht, wenn y anstelle von z^0, anstelle von z aber $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, und allgemeiner $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ anstelle von z^k geschrieben wird, so werden auf die gleiche Weise aus den einzelnen Faktoren der algebraischen Gleichung Differentialgleichungen gebildet werden, die notwendigerweise in der vorgelegten Differentialgleichung enthalten sein werden und aus welchen also die partikulären Werte für y gefunden werden. Wenn so $pz - q$ oder $q - pz$ Teiler der algebraischen Gleichung war, entsteht aus diesem durch das Gesetz des Zusammenhangs diese Differentialgleichung

$$qy - \frac{p\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

die integriert

$$y = \alpha \mathrm{e}^{\frac{qx}{p}}$$

gibt, welches diejenige ist, die wir aus demselben Faktor $pz - q$ gefunden haben.

§17 Daher sieht man ein, wenn man irgendeinen Teiler jener algebraischen Gleichung, z. B. $p + qz + rzz$, hat, dass dann die aus diesem Teiler zu entstehende Gleichung

$$py + \frac{q\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{r\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

einen Wert für y gibt, der auch der vorgelegten Differentialgleichung genügt. Daher werden wir also jene Schwierigkeit beseitigen können, die auftritt, wenn die algebraische Gleichung zwei oder mehrere gleiche Faktoren hat. Es sei als $(p - qz)^2$ ein Teiler der algebraischen Gleichung, nach Entwickeln von welchem diese Differenzen-Differentialgleichung

$$ppy - \frac{2pq\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{qq\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

resultieren wird. Wir wollen

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}} u$$

setzen, und nach der Substitution werden wird $\mathrm{dd}u = 0$ haben und daher $u = \alpha + \beta x$. Daher entsteht aus dem quadratischen Faktor der folgende Wert

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x),$$

der zwei beliebige Konstanten umfasst.

§18 Wenn die algebraische Gleichung einen kubischen Teil $(p-qz)^3$ hat, dann wird in der vorgelegten Differentialgleichung diese enthalten sein

$$p^3y - \frac{3ppq\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{3pqq\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{q^3\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = 0,$$

die für

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}}u$$

gesetzt in diese $\mathrm{d}^3u = 0$ verwandelt werden wird; daher entsteht $u = \alpha + \beta x + \gamma xx$, woraus der vorgelegten Gleichung dieser partikuläre Wert genügen wird

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}}(\alpha + \beta x + \gamma xx).$$

Wenn auf die gleiche Weise die algebraische Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

einen biquadratischen Teiler $(p-qz)^4$ hat, dann wird aus ihr diese genügende partikuläre Gleichung entstehen

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}}(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3).$$

Und wenn allgemein $(p-qz)^k$ ein Teiler ist, wird der daher entstehende Wert

$$y = \mathrm{e}^{\frac{px}{q}}(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 \cdots + \varkappa x^{k-1})$$

sein, sodass er k imaginäre Konstanten involviert.

§19 Wer noch Zweifel hat, ob auf diese Weise aus den zusammengesetzten Teilern, in welchen z mehr als eine Dimension hat, der Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

die Werte für y richtig abgeleitet werden, die der vorgelegten Gleichung

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

genügen, so wird dieser Zweifel aus der Natur der Sache leicht beseitigt werden können. Es sei der Teiler irgendwie zusammengesetzt

$$p + qz + rzz + sz^3 + \mathrm{etc}$$

und aus ihm bilde man die Gleichung

$$0 = py + \frac{q\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{r\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{s\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc};$$

es wird klar werden, dass der vollständige Wert von y für diese Gleichung hervorgeht, wenn alle Werte von y, welche die einfachen Teiler der Gleichung

$$0 = p + qz + rzz + sz^3 + \text{etc}$$

liefern, zu einer Summe zusammengefasst werden; Aber die einfachen Teiler dieser Gleichung sind zugleich einfache Teiler von jener

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n;$$

und deswegen ist der aus jenem zusammengesetzten Faktor entstehende Wert zugleich ein der vorgelegten Differentialgleichung entsprechender

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^\mathrm{n}y}{\mathrm{d}x^n}.$$

§20 Nachdem aber Werte von y gefunden wurden, die aus einigen einander gleichen einfachen Teilern der Gleichung

$$0 = A + Bz + Czz + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

entstehen, bleibt die andere zu lösende Schwierigkeit bestehen, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat. Es ist aber bekannt, wenn irgendeine Gleichung imaginäre Wurzeln hat, dass deren Anzahl immer gerade ist; und ich habe anderswo gezeigt, dass die Wurzeln immer durch Zusammenfassen von je zweien in Paare solcher Art aufgeteilt werden können, deren Summe wie Produkt eine reelle Größe wird. Daher werden anstelle der imaginären Teiler zusammengesetzte Teiler zweier Dimensionen von dieser Form

$$p - qz + rzz$$

als reell hervorgehen, die aber einfache imaginäre Teiler haben. Es wird also in einem solchen zusammengesetzten Teiler $qq < 4pr$ sein; daher ist

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1.$$

Nachdem also der ganze Sinus gleich 1 gesetzt wurde, wird der Kosinus eines reellen Winkels, welcher gleich φ sei, $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ sein; und es wird[1]

$$q = 2\sqrt{pr}\cos A\varphi$$

werden, aus welchem die allgemeinere Form von zusammengesetzten Teilern, die imaginäre Teiler in sich enthalte, von dieser Art

$$p - 2z\sqrt{pr}\cos A\varphi + rzz$$

sein wird.

§21 Es sei also

$$p - 2z\sqrt{pr}\cos A\varphi + rzz$$

ein Teiler solcher Art der Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + \text{etc},$$

aus diesem muss ein entsprechender Wert von y gefunden werden. Aber aus diesem Teiler entsteht diese Differenzen-Differentialgleichung

$$0 = py - \frac{2\mathrm{d}y\sqrt{pr}}{\mathrm{d}x}\cos A\varphi + \frac{r\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2},$$

um welche zu integrieren man

$$y = \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi}u$$

setze und es wird der Kürze wegen $f = \sqrt{\frac{p}{r}}$ gesetzt

$$ffu\mathrm{d}x^2\sin^2 A\varphi + \mathrm{dd}u = 0$$

werden. Man multipliziere mit $2\mathrm{d}u$ und integriere, es wird

$$ffuu\mathrm{d}x^2\sin^2 A\varphi + \mathrm{d}u^2 = \alpha^2 ff\mathrm{d}x^2\sin^2 A\varphi$$

sein, woher

$$f\mathrm{d}x\sin A\varphi = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}$$

[1] Anm. d. Ü.: Mit A wird hier und im folgenden immer das Bogenmaß des Winkels bezeichnet. Insbesondere stellt A also keine Konstante dar.

ist; diese gibt integriert

$$fx \sin A\varphi + \beta = A \sin \frac{u}{\alpha}.$$

Aus dieser Gleichung wird

$$u = \alpha \sin A(fx \sin A\varphi + \beta).$$

Als logische Konsequenz hat man

$$y = \alpha e^{fx \cos A\varphi} \sin A(fx \sin A\varphi + \beta),$$

welcher der entsprechende Wert von y für die vorgelegte Gleichung sein wird.

§22 Denselben oder äquivalenten Ausdruck für y berechnet man aus den, wenn auch einfachen, imaginären Faktoren der Gleichung

$$0 = p - 2z\sqrt{pr} \cos A\varphi + rzz,$$

die für $f = \sqrt{\frac{p}{r}}$ gesetzt in diese übergeht

$$0 = ff - 2fz \cos A\varphi + zz,$$

deren Wurzeln

$$z = f \cos A\varphi \pm f\sqrt{-1} \sin A\varphi$$

sind. Daher resultieren für y die Werte

$$e^{fx \cos A\varphi + fx\sqrt{-1} \sin A\varphi} \quad \text{und} \quad e^{fx \cos A\varphi - fx\sqrt{-1} \sin A\varphi},$$

nach Zusammenfassen von welchen

$$y = e^{fx \cos A\varphi} \left(\eta e^{+fx\sqrt{-1} \sin A\varphi} + \theta e^{-fx\sqrt{-1} \sin A\varphi} \right)$$

wird. Nach Verwandeln dieser Exponentialfunktionen in Reihen wird aber

$$y = e^{fx \cos A\varphi} \begin{cases} (\eta + \theta) \left(1 - \frac{ffxx \sin^2 A\varphi}{1 \cdot 2} + \frac{f^4 x^4 \sin^4 A\varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc} \right) \\ (\eta - \theta)\sqrt{-1} \left(fx \sin A\varphi - \frac{f^3 x^3 \sin^3 A\varphi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc} \right) \end{cases}$$

hervorgehen. Für

$$\eta = \theta + \alpha \quad \text{und} \quad (\eta - \theta)\sqrt{-1} = \beta$$

gesetzt wird nach Summieren dieser unendlichen Reihen

$$y = e^{fx \cos A\varphi} (\alpha \cos A\varphi fx \sin A\varphi + \beta \sin A fx \sin A\varphi)$$

entstehen, welcher Ausdruck auf den ersten leicht zurückgeführt wird.

§23 Daher erhalten wir also eine Methode den Wert von y zu finden, wenn zwei oder mehrere zusammengesetzte Teiler dieser Art einander gleich waren. Es sei nämlich

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^2$$

ein Teiler der algebraischen Gleichung, und weil er ja auf

$$(z - f\cos A\varphi - f\sqrt{-1}\sin A\varphi)^2(z - f\cos A\varphi + f\sqrt{-1}\sin A\varphi)^2$$

zurückgeführt wird, wird durch das Vorhergehende der daher zu entstehende Wert von y

$$y = e^{fx\cos A\varphi + fx\sqrt{-1}\sin A\varphi})(\eta + \theta x) + e^{fx\cos A\varphi - fx\sqrt{-1}\sin A\varphi}(\iota + \varkappa x)$$

sein. Weil aber

$$\begin{aligned}&e^{+fx\sqrt{-1}\sin A\varphi}\eta + e^{-fx\sqrt{-1}\sin A\varphi}\iota\\ =&\alpha\cos Afx\sin A\varphi + \beta\sin Afx\sin A\varphi\end{aligned}$$

ist, berechnet man daher, dass

$$y = e^{fx\cos A\varphi}\left[(\alpha + \beta x)\cos Afx\sin A\varphi + (\gamma + \delta x)\sin Afx\sin A\varphi\right]$$

sein wird.

§24 Wenn daher aber ein Kubus oder eine andere Potenz von

$$ff - 2fz\cos A\varphi + zz$$

sein Teiler der algebraischen Gleichung

$$0 = A + Bz + Czz + Dz^3 + \cdots + Nz^n$$

war, dann finde man aus denselben Potenzen der einfachen imaginären Faktoren die Werte von y und fasse sie gemäß §18 zu einer Summe zusammen. Danach können die imaginären Exponentialgrößen in Sinus und Kosinus von Kreisbögen mit Hilfe dieses Lemmas

$$\begin{aligned}&e^{+fx\sqrt{-1}\sin A\varphi}\eta x^k + e^{-fx\sqrt{-1}\sin A\varphi}\theta x^k\\ =&\alpha x^k\cos Afx\sin A\varphi + \beta x^k\sin Afx\sin A\varphi\end{aligned}$$

verwandelt werden. Wenn so

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^4$$

ein Teiler der algebraischen Gleichung war, dann wird aus ihm die folgende Integralgleichung entstehen

$$\begin{aligned} y = \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \big[&(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\cos Afx\sin A\varphi \\ &+ (\varepsilon + \zeta x + \eta x^2 + \theta x^3)\sin Afx\sin A\varphi\big]\,. \end{aligned}$$

§25 Diese Ausdrücke können auf viele Arten verwandelt werden, je nachdem ob die Konstanten durch die einen oder anderen Arten ausgedrückt werden. Am angenehmsten scheint aber diese Transformation, in der die Werte von y auf die in §21 gefundene Form zurückgeführt werden. So wird diese Formel

$$\mu x^k \cos Afx\sin A\varphi + \nu x^k \sin Afx\sin A\varphi,$$

wenn

$$\mu = \lambda\sin Ap \quad \text{und} \quad \nu = \lambda\cos Ap$$

gesetzt wird, in diese verwandelt werden

$$\lambda x^k \sin A(fx\sin A\varphi + p).$$

Deswegen wird aus dem Faktor des unbestimmten Exponenten

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^k$$

der folgende Wert von y gebildet werden

$$\begin{aligned} y = \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi}(&\alpha\sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{A}) + \beta x\sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{B}) \\ &+\gamma x^2\sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{C}) + \cdots + \varkappa x^{k-1}\sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{K}), \end{aligned}$$

und auf diese Weise findet man aus allen Teilern, wie auch immer sie beschaffen waren, reelle Werte für die Variable y.

§26 Was nun die beliebigen Konstanten, die in die auf diese Weise zu findenden Werte von y eingehen, angeht, ist es klar, dass zuerst aus einfachen Faktoren der Form $f - z$ die Werte von y entstehen, die eine beliebige Konstante enthalten; darauf enthält der Wert von y, der aus dem Faktor $(f - z)^k$

entsteht, k beliebige Konstanten. Weiter geht aus dem zusammengesetzten Faktor

$$ff - 2fz\cos A\varphi + zz$$

der Wert von y hervor, der zwei beliebige Konstanten enthält; und aus irgendeiner Potenz von Faktoren dieser Art

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^k$$

wird ein Wert von y gebildet, in dem $2k$ beliebige Konstanten enthalten sind, so dass die Anzahl der beliebigen Konstanten gleich der Anzahl der Dimensionen von z ist, welche diese Variable im Teiler enthält, aus welchem der Wert von y gefunden worden ist.

§27 Wenn daher also die algebraische Gleichung, die wir aus der vorgelegten Differentialgleichung gebildet haben,

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots + Nz^n,$$

in ihre entweder einfachen oder reellen zusammengesetzten oder solche Faktoren, die eine Potenz von den einfachen oder zusammengesetzten sind, aufgelöst wird und auf die beschriebene Art aus den einzelnen Faktoren die entsprechenden Werte von y gebildet werden, dann werden alle diese Werte von y zusammen betrachtet so viele beliebige Konstanten enthalten, wie im Exponenten n Einheiten enthalten sind. All diese Werte werden also zu einer Summe zusammengefasst nicht nur den Wert für y geben, der der vorgelegten Gleichung

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^\mathrm{n}y}{\mathrm{d}x^n}$$

genügt, sondern dieser wird auch der vollständige Wert von y sein, der alle möglichen Werte, die dieser Gleichung entsprechen, in sich umfassen wird. Auf diese Weise wird diese Differentialgleichung vollkommen in endlichen Termen integriert und erfordert nie eine anderes Integral außer das der Hyperbel und Quadraturen des Kreises.

Problem I

Wenn eine Differentialgleichung vom Grad n von dieser Form

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \cdots + \frac{N\mathrm{d}^\mathrm{n}y}{\mathrm{d}x^n}$$

vorgelegt war, in welcher das Element $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt worden ist und die Buchstaben A, B, C, D, $\ldots$, N irgendwelche konstanten Koeffizienten bezeichnen, so ist das Integral dieser Gleichung in endlichen reellen Termen zu finden.

Lösung

Man schreibe 1 anstelle von y, z anstelle von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, z^2 anstelle von $\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}$ und allgemein z^k anstelle von $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$; und dann bilde man die folgende algebraische Gleichung von n Dimensionen

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Nz^n.$$

Man suche weiter alle einfachen reellen Teiler dieser Gleichung, welche sie involviert, und, wenn sie imaginäre Teiler hat, so nehme man an deren Stelle zusammengesetzte reelle Teiler, in welchen z zwei Dimensionen hat, weil ja immer zwei imaginäre Faktoren einen zusammengesetzten reellen Faktor festsetzen. Aus den einzelnen Teilern bilde man darauf auf die folgende Weise die partikulären Werte für y. Aus irgendeinem beliebigen einfachen Faktor, der kein mehrfacher dieser Form $f - z$ ist, entsteht natürlich dieser Wert

$$y = \alpha \mathrm{e}^{fx}.$$

Aus zwei oder mehreren gleichen Faktoren, die zusammengenommen wurden, müssen die Werte von y bestimmt werden. Aus dem Faktor $(f - z)^2$ entsteht nämlich

$$y = (\alpha + \beta x)\mathrm{e}^{fx},$$

aus dem Faktor $(f - z)^3$ entsteht

$$y = (\alpha + \beta x + \gamma xx)\mathrm{e}^{fx};$$

und allgemein leitet man aus dem Faktor

$$y = \mathrm{e}^{fx}(\alpha + \beta x + \gamma xx + \cdots + \varkappa x^{k-1})$$

ab. Was aber die zusammengesetzten Faktoren betrifft, wenn je eine algebraische Gleichung den Faktor

$$ff - 2fz \cos A\varphi + zz$$

hat, der nicht mehrfach ist, so wird der aus ihm entstehende Wert

$$y = \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi}\alpha \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{A})$$

sein. Wenn eine algebraische Gleichung zwei gleiche Faktoren von dieser Art hat, sodass sie durch

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^2$$

teilbar ist, dann entsteht aus diesem quadratischen Teiler der folgende Wert

$$y = \alpha \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{A}) + \beta x \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{B}).$$

Wenn aber irgendeine Potenz dieses Faktors, z. B.

$$(ff - 2fz\cos A\varphi + zz)^k,$$

ein Teiler der algebraischen Gleichung war, dann resultiert aus ihm der folgende Wert

$$\begin{aligned} y &= \alpha \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{A}) + \beta x \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{B}) \\ &+ \gamma x^2 \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{C}) + \delta x^3 \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{D}) \\ &+ \cdots + \varkappa x^{k-1} \mathrm{e}^{fx\cos A\varphi} \sin A(fx\sin A\varphi + \mathfrak{K}). \end{aligned}$$

Nachdem aber auf diese Weise aus den einzelnen Teilern der algebraischen Gleichung die entsprechenden Werte von y gefunden wurden, ist nichts anderes übrig, außer dass alle diese Werte zu einer Summe zusammengefasst werden, und auf diese Weise wird der vollständige Wert von y hervorgehen; und er selbst wäre es, der hervorgegangen wäre, wenn die Differentialgleichung vom Grad n, die vorgelegt war, n-fach integriert werden würde. Q.E.I.

Beispiel 1

§29 Das Integral dieser Differentialgleichung zweiten Grades

$$0 = ay + \frac{b\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{c\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}$$

ist zu finden.

Nachdem, wie wir vorgeschrieben haben, 1 für y, z für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und zz für $\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}$ gesetzt wurde, entsteht diese Gleichung

$$0 = a + bz + czz;$$

diese wird entweder zwei reelle Wurzeln haben, oder zwei imaginäre; das erste passiert, wenn $bb > 4ac$ ist, dass zweite, wenn $bb < 4ac$ ist. Wenn also $bb > 4ac$ ist, so werden die Wurzeln

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{bb - 4ac}}{2c}$$

sein und in diesem Fall wird das gesuchte Integral

$$y = \alpha \mathrm{e}^{\frac{-bx + x\sqrt{bb-4ac}}{2c}} + \beta \mathrm{e}^{\frac{-bx - x\sqrt{bb-4ac}}{2c}}$$

sein. Hier ist der Fall getrennt zu betrachten, in dem $bb = 4ac$ ist, dann wird nämlich

$$a + 2z\sqrt{ac} + czz$$

ein Quadrat

$$(\sqrt{a} + z\sqrt{c})^2$$

sein, welches mit der Form $(f - z)^2$ verglichen

$$f = -\sqrt{\frac{a}{c}}$$

gibt, woher das Integral

$$y = (\alpha + \beta x)\mathrm{e}^{-x\sqrt{\frac{a}{c}}}$$

sein wird, welches das Integral der Gleichung

$$0 = ay + \frac{2\mathrm{d}y\sqrt{ac}}{\mathrm{d}x} + \frac{c\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}$$

ist. Es sei nun $bb < 4ac$ und die Gleichung

$$0 = a + bz + czz$$

wird keine reellen Wurzeln haben, die also mit der Form

$$ff - 2fz \cos A\varphi + zz$$

verglichen

$$\frac{b}{c} = -2f \cos A\varphi \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = ff$$

gibt; daher wird

$$f = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad \text{und} \quad \cos A\varphi = \frac{-b}{2\sqrt{ac}}$$

sein und daher

$$\sin A\varphi = \frac{\sqrt{4ac - bb}}{2\sqrt{ac}},$$

woraus das Integral

$$y = \alpha e^{\frac{-bx}{2c}} \sin A \left(\frac{x\sqrt{4ac - bb}}{2c} + \mathfrak{A} \right)$$

entsteht.

Beispiel 2

§30 Das Integral dieser Differentialgleichung dritten Grades

$$0 = y - \frac{3a^2 ddy}{dx^2} + \frac{2a^3 d^3 y}{dx^3}$$

ist zu finden.
Aus dieser Gleichung entsteht also diese algebraische Gleichung

$$0 = 1 - 3a^2 zz + 2a^3 z^3,$$

die in diese Faktoren aufgelöst wird

$$(1 + 2az), \quad (1 - az)^2.$$

Der erste Faktor $1 + 2az$ gibt mit der Form $f - z$ verglichen

$$f = \frac{-1}{2a},$$

woher

$$y = \alpha e^{-\frac{x}{2\alpha}}$$

entsteht; der zweite Faktor $(1 - az)^2$ muss mit $(f - z)^2$ verglichen werden, aus welchem

$$f = \frac{1}{a}$$

wird und daher entsteht
$$y = (\beta + \gamma x)\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}.$$
Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung wird
$$y = \alpha\mathrm{e}^{-\frac{x}{2a}} + (\beta + \gamma x)\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}$$
sein.

BEISPIEL 3

§31 Es ist das Integral dieser Differentialgleichung dritten Grades
$$0 = y - \frac{a^3 \mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$$
zu finden.
Die aus dieser Gleichung entstehende Gleichung wird
$$0 = 1 - a^3 z^3$$
sein, welche in diese Faktoren aufgelöst wird
$$(1 - az), \quad (1 + az + a^2 zz),$$
sodass ihre Teiler diese sind
$$\frac{1}{a} - z \quad \text{und} \quad \frac{1}{aa} + \frac{z}{a} + zz,$$
von denen der zweite nicht in einfache reelle aufgelöst werden kann. Jener Teiler $\frac{1}{a} - z$ gibt für das Integral
$$y = \alpha\mathrm{e}^{\frac{x}{a}},$$
der andere Teiler aber
$$\frac{1}{aa} + \frac{z}{a} + zz$$
gibt mit der Form
$$ff - 2fz\cos A\varphi + zz$$
verglichen
$$f = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{-2\cos A\varphi}{a} = \frac{1}{a},$$

sodass

$$\cos A\varphi = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin A\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

wird; daher resultiert aus diesem Teiler

$$y = \beta e^{-\frac{x}{2a}} \sin A \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \mathfrak{A} \right).$$

Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung wird also

$$y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{2a}} \sin A \left(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + \mathfrak{A} \right)$$

sein.

BEISPIEL 4

§32 Es ist das Integral dieser Differentialgleichung vierten Grades zu finden

$$0 = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}.$$

Aus dieser Gleichung wird also diese algebraische Gleichung

$$0 = 1 - a^4 z^4$$

gebildet werden, die zwei einfache reelle Teiler hat,

$$\frac{1}{a} - z \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} + z;$$

die übrigen zwei imaginären sind in diesem zusammengesetzten enthalten

$$\frac{1}{aa} + zz.$$

Die beiden einfachen Teiler geben für das Integral

$$y = \alpha x^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}}.$$

Der Teiler

$$\frac{1}{aa} + zz$$

aber gibt mit der Form

$$ff - 2fz\cos A\varphi + zz$$

verglichen

$$f = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \cos A\varphi = 0$$

und daher

$$\sin A\varphi = 1.$$

Der exponentielle Term

$$e^{fx\cos A\varphi}$$

geht wegen des Exponenten gleich 0 in die Einheit über und es wird

$$y = \gamma \sin A\left(\frac{x}{a} + \mathfrak{A}\right)$$

sein. Das vollständige Integral wird also

$$y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}} + \gamma \sin A\left(\frac{x}{a} + \mathfrak{A}\right)$$

sein.

BEISPIEL 5

§33 Es ist das Integral dieser Differentialgleichung vierten Grades zu finden

$$0 = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}.$$

Es wird also diese algebraische Gleichung aufgelöst werden müssen

$$0 = 1 + a^4 z^4;$$

weil diese keinen einfachen reellen Teiler hat, wird sie in diese beiden zusammengesetzten reellen Faktoren aufgelöst

$$1 + az\sqrt{2} + aazz \quad \text{und} \quad 1 - az\sqrt{2} + aazz,$$

die durch aa geteilt, damit sie mit der Form

$$ff - 2fz\cos A\varphi + zz$$

verglichen werden können,

$$\frac{1}{aa} + \frac{z\sqrt{2}}{a} + zz \quad \text{und} \quad \frac{1}{aa} - \frac{z\sqrt{2}}{a} + zz$$

geben werden; für jede der beiden wird $f = \frac{1}{a}$, für jene aber

$$f \cos A\varphi = \frac{-1}{a\sqrt{2}},$$

für diese

$$f \cos A\varphi = \frac{1}{a\sqrt{2}};$$

daher wird wiederum für jede der beiden

$$f \sin A\varphi = \frac{1}{a\sqrt{2}}.$$

Aus diesen entsteht das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = \alpha e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}}} \sin A \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + \mathfrak{A} \right) + \beta e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \sin A \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + \mathfrak{B} \right).$$

Beispiel 6

§34 Es ist das vollständige Integral dieser Differentialgleichung siebten Grades

$$0 = y + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^7y}{dx^7}$$

zu finden.
Es entsteht daher diese algebraische Gleichung siebter Ordnung

$$0 = 1 + zz + z^3 + z^4 + z^5 + z^7,$$

die in die folgenden einfachen wie zusammengesetzten Faktoren aufgelöst wird:

$$(1 + z), \quad (1 + z + zz), \quad (1 - z + zz)^2.$$

Der erste dieser gibt mit der Form $f - z$ verglichen $f = -1$, und daher entsteht

$$y = \alpha e^{-x}.$$

Der Faktor $1+z+zz$ gibt aber mit

$$ff-2fz\cos A\varphi+zz$$

verglichen

$$f=1 \quad \text{und} \quad \cos A\varphi=-\frac{1}{2},$$

woher

$$\sin A\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ist, und das daher entstehende Integral

$$y=\beta e^{-\frac{x}{2}}\sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{A}\right).$$

Der dritte Faktor $(1-z+zz)^2$ muss mit der Form

$$(ff-2fz\cos A\varphi+zz)^2$$

verglichen werden, woher

$$f=1, \quad \cos A\varphi=\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin A\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

wird. Daher geht also das Integral

$$y=\gamma e^{\frac{x}{2}}\sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{B}\right)+\delta x e^{\frac{x}{2}}\sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{C}\right)$$

hervor. Deswegen wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y=&\alpha e^{-x}+\beta e^{-\frac{x}{2}}\sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{A}\right)\\ &+\gamma e^{\frac{x}{2}}\sin A\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{B}\right)+\delta x e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{C}\right) \end{aligned}$$

sein, in welcher natürlich sieben beliebige Konstanten enthalten sind.

BEISPIEL 7

§35 Es ist das vollständige Integral dieser Differentialgleichung achten Grades zu finden

$$0 = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^4y}{dx^4} + \frac{4d^5y}{dx^5} - \frac{4d^6y}{dx^6} + \frac{3d^7y}{dx^7} - \frac{d^8y}{dx^8}.$$

Die algebraische Gleichung achten Grades, die aufgelöst werden muss, wird

$$0 = z^3 - 3z^4 - 4z^5 - 4z^6 + 3z^7 - z^8$$

sein; diese ist zuerst bekannt, durch z^3 teilbar zu sein, welcher Teiler mit der Form $(f - z)^3$ verglichen $f = 0$ gibt, und daher findet man für das Integral

$$y = \alpha + \beta x + \gamma xx.$$

Nachdem dieser Teiler ins Kalkül gezogen wurde, ist übrig, diese Gleichung aufzulösen

$$0 = 1 - 3z + 4zz - 4z^3 + 3z^4 - z^5,$$

die durch $1 + zz$ teilbar entdeckt wird, nach Vergleich wovon mit der Form

$$ff - 2fz \cos A\varphi + zz$$

$$f = 1 \quad \text{und} \quad \cos A\varphi = 0$$

wird, woher $\sin A\varphi = 1$ ist; und daher resultiert

$$y = \delta \sin A(x + \mathfrak{A}).$$

Nachdem weiter die Teilung durch $1 + zz$ angestellt wurde, bleibt die Gleichung

$$1 - 3z + 3zz - z^3 = 0 = (1 - z)^3$$

zurück; in dieser Form $(f - z)^3$ wird also $f = 1$, das daher zu entstehende Integral ist

$$y = (\varepsilon + \zeta x + \eta xx)e^x.$$

Als logische Konsequenz ist das Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta \sin A(x + \mathfrak{A}) + (\varepsilon + \zeta x + \eta xx)e^x.$$

BEISPIEL 8

§36 Es ist das Integral dieser Differentialgleichung unbestimmten Grades zu finden
$$0 = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}} y}{\mathrm{d}x^n}.$$
Daher resultiert diese algebraische Gleichung
$$z^n = 0;$$
weil all deren Wurzeln gleich sind, muss sie mit dem Faktor $(f-z)^k$ verglichen werden, und es wird $k = n$ und $f = 0$ werden, woher sofort das gesuchte Integral
$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \nu x^{n-1}$$
hervorgeht. Dieses Integral wird aber auch leicht durch n-fache Integration gefunden. Durch die erste Gleichung entsteht nämlich
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^{n-1}},$$
man multipliziere mit $\mathrm{d}x$ und integriere zum zweiten mal, es wird
$$\alpha x + \beta = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}}$$
sein. Diese gibt mit $\mathrm{d}x$ multipliziert und zum dritten Mal integriert
$$\frac{\alpha xx}{2} + \beta x + \gamma = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}-3} y}{\mathrm{d}x^{n-3}}$$
und so weiter. Wenn die Integration n-fach wiederholt wird, wird nach Veränderung der Ausdrücke der Konstanten das Integral dasselbe sein, das wir durch unsere Regel gefunden haben.

§37 Mit Hilfe dieser Methode können auch viele andere Differentialgleichungen unbestimmten Grades integriert werden, die natürlich auf algebraische Gleichungen führen, deren einfache oder zusammengesetzte reelle Faktoren tatsächlich beschafft werden können. Weil aber das nicht der Ort ist, die Art zu behandeln, Teiler von Gleichungen dieser Art von unbestimmter Anzahl von Dimensionen zu finden, werden wir hier darüber hinaus Differentialgleichungen von solcher Art behandeln, die auf algebraische Gleichungen führen, deren Faktoren schon irgendwoher bekannt sind. Gleichungen dieser Art aber sind

$$f^n \pm z^n = 0 \quad \text{und} \quad f^{2n} \pm 2pf^nz^n \pm z^{2n} = 0;$$

die reellen einfachen wie zusammengesetzten oder trinomialen Faktoren dieser Ausdrücke sind nämlich alle von den sich um die Analysis verdientesten Herren Cotes und de Moivre beschafft worden, welche wir als als bekannt bei der Lösung der folgenden Probleme annehmen wollen.

Problem II

§38 Wenn diese Differentialgleichung vom Grad n vorgelegt war

$$0 = y - \frac{d^n y}{dx^n},$$

in welcher das Element dx^n konstant gesetzt wird, ist ihr vollständiges Integral zu finden.

Lösung

Nachdem, wie wir vorgeschrieben haben, 1 anstelle von y und z^n anstelle von $\frac{d^n y}{dx^n}$ gesetzt wurde, wird man diese algebraische Gleichung haben

$$0 = 1 - z^n,$$

ein einfacher Teiler welcher Gleichung immer $1 - z$ ist und, wenn n eine gerade Zahl war, ist auch $1 + z$ ein einfacher Teiler. Die übrigen einfachen Teiler sind alle imaginär und sind in dieser allgemeinen Form enthalten

$$1 - 2z \cos A \frac{2k\pi}{n} + zz$$

(wo π den Halbumfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius gleich 1 ist); dieser gibt mit dem allgemeinen trinomialen Teiler

$$ff - 2fz \cos A\varphi + zz$$

verglichen

$$f = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n},$$

so dass dieser Teiler den Integralwert

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{2k\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{2k\pi}{n} + \mathfrak{A} \right)$$

gibt. Wenn daher nun anstelle von $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen, die den Exponenten n nicht überschreiten, eingesetzt werden, werden alle möglichen Werte hervorgehen, die für y eingesetzt genügen. In dieser allgemeinen Form ist aber auch der Wert von y enthalten, der aus dem einfachen Faktor $1 - z$ entsteht, der $y = \alpha e^x$ ist; für $k = 0$ gesetzt wird nämlich

$$\cos A \frac{2k\pi}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \sin A \frac{2k\pi}{n} = 0$$

und daher $y = \alpha e^x$, wegen des konstanten in α umfassten $\sin A\mathfrak{A}$. Auf die gleiche Weise resultiert, wenn n eine gerade Zahl ist, der aus dem Faktor $1 + z$ zu entstehende Wert von y, der $y = \alpha e^{-x}$ ist, aus dem allgemeinen Faktor für $2k = n$ gesetzt; es wird nämlich dann

$$\cos A \frac{2k\pi}{n} = -1 \quad \text{und} \quad \sin A \frac{2k\pi}{n} = 0,$$

sodass der aus dem allgemeinen Faktor zu entstehende Wert $y = \alpha e^{-x}$ ist. Das vollständige Integral wird man also erhalten, wenn in der allgemeinen Form

$$y = \alpha e^{x \cos A \frac{2k\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{2k\pi}{n} + \mathfrak{A} \right)$$

nacheinander anstelle von $2k$ alle geraden Zahlen von 0 bis hin zu n eingesetzt werden und diese Werte zu einer Summe zusammengefasst werden. Es wird also das gesuchte und vollständige Integral

$$\begin{aligned} y = \alpha e^x &+ \beta e^{x \cos A \frac{2\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{2\pi}{n} + \mathfrak{B} \right) \\ &+ \gamma e^{x \cos A \frac{4\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{4\pi}{n} + \mathfrak{C} \right) \\ &+ \delta e^{x \cos A \frac{6\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{6\pi}{n} + \mathfrak{D} \right) \\ &+ \varepsilon e^{x \cos A \frac{8\pi}{n}} \sin A \left(x \sin A \frac{8\pi}{n} + \mathfrak{E} \right) \\ &+ \text{etc} \end{aligned}$$

hervorgehen, welche Glieder bis dort hin fortgesetzt werden müssen, bis man n beliebige Konstanten hat, oder, was auf dasselbe hinausläuft, bis der Koeffizient von π größer als die Einheit wird. Es wird aber, wenn n eine ungerade Zahl ist, das letzte Glied gleich

$$\nu e^{x \cos A \frac{(n-1)}{n}\pi} \sin A \left(x \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \mathfrak{N} \right)$$

werden; aber wenn n eine gerade Zahl ist, wird das letzte Glied gleich νe^{-x} sein und das vorletzte gleich

$$\mu e^{x \cos A \frac{(n-2)}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{(n-2)\pi}{n} + \mathfrak{M} \right).$$

Für jeden Wert von n wird das vollständige Integral angenehm angegeben werden. Q.E.I.

§39 Um diese Integrale klarer vor Augen zu führen, wollen wir für die einzelnen Werte von n mit Beginn ab der Einheit die Integrale der Gleichung

$$0 = y - \frac{d^n y}{dx^n}$$

beschaffen:

1. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{dy}{dx}$ ist

$$y = \alpha e^x.$$

2. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{ddy}{dx^2}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{-x}.$$

3. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^3y}{dx^3}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{x \cos A \frac{2}{3}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2}{3}\pi + \mathfrak{B} \right).$$

4. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^4y}{dx^4}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta \sin A\, (x + \mathfrak{B}) + \gamma e^{-x}.$$

5. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^5y}{dx^5}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{x\cos A\frac{2}{5}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2}{5}\pi + \mathfrak{B} \right) + \gamma e^{x\cos A\frac{4}{5}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{4}{5}\pi + \mathfrak{C} \right).$$

6. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^6y}{dx^6}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{x\cos A\frac{1}{3}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{3}\pi + \mathfrak{B} \right) + \gamma e^{x\cos A\frac{2}{3}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2}{3}\pi + \mathfrak{C} \right) + \delta e^{-x}.$$

7. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^7y}{dx^7}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{x\cos A\frac{2}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2}{7}\pi + \mathfrak{B} \right) + \gamma e^{x\cos A\frac{4}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{4}{7}\pi + \mathfrak{C} \right) + \delta e^{x\cos A\frac{6}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{6}{7}\pi + \mathfrak{D} \right).$$

8. Das Integral dieser Gleichung $0 = y - \frac{d^8y}{dx^8}$ ist:

$$y = \alpha e^x + \beta e^{x\cos A\frac{1}{4}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{4}\pi + \mathfrak{B} \right) + \gamma \sin A (x + \mathfrak{C}) + \delta e^{x\cos A\frac{3}{4}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{3}{4}\pi + \mathfrak{D} \right) + \varepsilon e^{-x}.$$

etc.

Problem III

§40 Wenn diese Differentialgleichung von unbestimmten Grad n

$$0 = y + \frac{d^ny}{dx^n}$$

vorgelegt war, ist, nachdem das Element dx konstant gesetzt wurde, ihr Integral zu finden.

Lösung

Nachdem gemäß der Regel 1 für y und z^n für $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ gesetzt wurde, wird diese algebraische Gleichung $0 = 1 + z^n$ hervorgehen; wenn n eine ungerade Zahl war, wird die Gleichung den einfachen reellen Teiler $1 + z$ haben, aus welchem $y = \alpha \mathrm{e}^{-x}$ entsteht. Die übrigen einfachen Teiler sind alle imaginär; aber beide von diesen sind in diesem trinomialen reellen Faktor enthalten

$$1 - 2z \cos A \frac{2k-1}{n}\pi + zz,$$

und dieser Ausdruck gibt ganz und gar alle Teiler der Form $1 + z^n$, wenn anstelle von $2k - 1$ alle ungeraden Zahlen nicht größer als n eingesetzt werden. Nachdem aber diese Formel

$$1 - 2z \cos A \frac{2k-1}{n}\pi + zz$$

mit dem allgemeinen Faktor

$$ff - 2fz \cos A\varphi + zz$$

verglichen wurde, wird

$$f = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{2k-1}{n}\pi;$$

daher entsteht also der folgende allgemeine Wert für y

$$y = \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{2k-1}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2k-1}{n}\pi + \mathfrak{A} \right).$$

Und in diesem allgemeinen Wert ist auch der aus dem einfachen Faktor $1 + z$, wenn natürlich n eine ungerade Zahl war, zu entstehende Wert enthalten; es geht nämlich in diesem Fall $y = \alpha \mathrm{e}^{-x}$ hervor, wenn $2k - 1 = n$ war, dann wird nämlich

$$\cos A \frac{2k-1}{n}\pi = \cos A\pi = -1$$

und sein Sinus gleich 0. Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung wird man also finden, wenn in dieser allgemeinen Form

$$y = \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{2k-1}{n}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{2k-1}{n}\pi + \mathfrak{A} \right)$$

anstelle von $2k-1$ nacheinander alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, etc, die natürlich nicht größer als der Exponent n sind, eingesetzt werden und diese Werte alle zu einer Summe zusammengefasst werden. Es wird also auf diese Weise das gesuchte und vollständige Integral hervorgehen

$$\begin{aligned}
y = {} & \alpha e^{x\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{1}{n}\pi+\mathfrak{A}\right)\\
& +\beta e^{x\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{3}{n}\pi+\mathfrak{B}\right)\\
& +\gamma e^{x\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{5}{n}\pi+\mathfrak{C}\right)\\
& +\delta e^{x\cos A\frac{7}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{7}{n}\pi+\mathfrak{D}\right)\\
& +\text{etc},
\end{aligned}$$

welche Glieder bis dorthin festgesetzt werden müssen, bis n beliebige Konstanten eingegangen sind; das wird passieren, wenn aus der Reihe der Brüche

$$\frac{1}{n},\quad \frac{3}{n},\quad \frac{5}{n},\quad \frac{7}{n},\quad \text{etc}$$

alles, was nicht die Einheit überragt, genommen wird. Es wird aber, wenn n eine gerade Zahl ist, das letzte Glied

$$\nu e^{x\cos A\frac{n-1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{n-1}{n}\pi+\mathfrak{N}\right)$$

werden. Aber wenn n eine ungerade Zahl ist, wird das letzte Glied

$$\nu e^{-x}$$

sein, dass vorletzte aber

$$\mu e^{x\cos A\frac{n-2}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{n-2}{n}\pi+\mathfrak{M}\right),$$

woher als leichte Aufgabe das vollständige Integral in jedem Fall angegeben wird. Q.E.I.

§41 Um dieses Integral sorgfältiger zu erklären, wollen wir einige einfachere Fälle entwickeln, indem wir anstelle von n, wie wir es im vorhergehenden Problem gemacht haben, die ganzen Zahlen 1, 2, 3, …, 8 setzen, um die Tragweite dieser Integration völlig zu erkennen.

1. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ist
$$y = \alpha \mathrm{e}^{-x}.$$

2. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}$ ist
$$y = \alpha \sin A(x + \mathfrak{A}).$$

3. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ ist
$$y = \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{1}{3}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{3}\pi + \mathfrak{A} \right) + \beta \mathrm{e}^{-x}.$$

4. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$ ist
$$\begin{aligned} y = {} & \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{1}{4}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{4}\pi + \mathfrak{A} \right) \\ & \beta \mathrm{e}^{x \cos A \frac{3}{4}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{3}{4}\pi + \mathfrak{B} \right). \end{aligned}$$

5. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{d}^5y}{\mathrm{d}x^5}$ ist
$$\begin{aligned} y = {} & \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{1}{5}\pi} \sin A \left(x \sin \frac{1}{5}\pi + \mathfrak{A} \right) \\ & + \beta \mathrm{e}^{x \cos A \frac{3}{5}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{3}{5}\pi + \mathfrak{B} \right) + \gamma \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

6. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{\mathrm{d}^6y}{\mathrm{d}x^6}$ ist
$$\begin{aligned} y = {} & \alpha \mathrm{e}^{x \cos A \frac{1}{6}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{6}\pi + \mathfrak{B} \right) + \beta \sin A(x + \mathfrak{B}) \\ & + \gamma \mathrm{e}^{x \cos A \frac{5}{6}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{5}{6}\pi + \mathfrak{C} \right). \end{aligned}$$

7. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{d^7y}{dx^7}$ ist

$$y = \alpha e^{x\cos A\frac{1}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{7}\pi + \mathfrak{A} \right)$$
$$+ \beta e^{x\cos A\frac{3}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{3}{7}\pi + \mathfrak{B} \right)$$
$$+ \gamma e^{x\cos A\frac{5}{7}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{5}{7}\pi + \mathfrak{C} \right) + \delta e^{-x}.$$

8. Das Integral dieser Gleichung $0 = y + \frac{d^8y}{dx^8}$ ist

$$y = \alpha e^{x\cos A\frac{1}{8}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{1}{8}\pi + \mathfrak{A} \right)$$
$$+ \beta e^{x\cos A\frac{3}{8}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{3}{8}\pi + \mathfrak{B} \right)$$
$$+ \gamma e^{x\cos A\frac{5}{8}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{5}{8}\pi + \mathfrak{C} \right)$$
$$+ \delta e^{x\cos A\frac{7}{8}\pi} \sin A \left(x \sin A \frac{7}{8}\pi + \mathfrak{D} \right).$$

Problem IV

§42 Wenn diese Differentialgleichung vom Grad $2n$

$$0 = y + \frac{2h\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{dx^n} + \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$$

vorgelegt war, ist, nachdem das Element dx konstant genommen wurde, ihr Integral zu finden, während $hh > 1$ ist.

Lösung

Wenn wir gemäß der Regel 1 für y, z^n für $\frac{d^{\mathrm{n}}y}{dx^n}$ und z^{2n} für $\frac{d^{2\mathrm{n}}\mathrm{y}}{dx^{2n}}$ setzen, geht diese algebraische Gleichung

$$0 = 1 + 2hz^n + z^{2n}$$

hervor, die wegen $hh > 1$ in diese zwei Faktoren aufgelöst wird:

$$\left[z^n + h + \sqrt{hh-1}\right]\left[z^n + h - \sqrt{hh-1}\right].$$

Wir wollen aber hier h als eine positive Größe setzen; und deswegen werden

$$h + \sqrt{hh-1} \quad \text{wie} \quad h - \sqrt{hh-1}$$

positive Größen sein. Es sei also

$$h + \sqrt{hh-1} = a^n \quad \text{und} \quad h - \sqrt{hh-1} = b^n,$$

sodass $ab = 1$ ist. Wir werden hier also diese Gleichung in zwei reelle Faktoren aufgelöst haben

$$0 = (z^n + a^n)(z^n + b^n)$$

und die einzelnen trinomialen reellen Faktoren des ersten Faktors werden in dieser Form enthalten sein

$$aa - 2az \cos A \frac{2n-1}{n}\pi + zz,$$

der zweiten aber in dieser

$$bb - 2bz \cos A \frac{2k-1}{n}\pi + zz.$$

Man wird also alle Faktoren haben, wenn in jeder der beiden Formen nacheinander für $2k-1$ alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, etc gesetzt werden, die nicht größer als der Exponent n sind. Das gesuchte Integral wird also aus diesen Faktoren so gebildet:

$$\begin{aligned}
y = {} & A e^{ax \cos A \frac{1}{n}\pi} \sin A \left(ax \sin A \frac{1}{n}\pi + \mathfrak{A} \right) \\
& + B e^{ax \cos A \frac{3}{n}\pi} \sin A \left(ax \sin A \frac{3}{n}\pi + \mathfrak{B} \right) \\
& + C e^{ax \cos A \frac{5}{n}\pi} \sin A \left(ax \sin A \frac{5}{n}\pi + \mathfrak{C} \right) \\
& + D e^{ax \cos A \frac{7}{n}\pi} \sin A \left(ax \sin A \frac{7}{n}\pi + \mathfrak{D} \right) + \text{etc} \\
& + \alpha e^{bx \cos A \frac{1}{n}\pi} \sin A \left(bx \sin A \frac{1}{n}\pi + \mathfrak{a} \right) \\
& + \beta e^{bx \cos A \frac{3}{n}\pi} \sin A \left(bx \sin A \frac{3}{n}\pi + \mathfrak{b} \right) \\
& + \gamma e^{bx \cos A \frac{5}{n}\pi} \sin A \left(bx \sin A \frac{5}{n}\pi + \mathfrak{c} \right) + \text{etc}
\end{aligned}$$

Q.E.I.

PROBLEM V

§43 Wenn diese Differentialgleichung des unbestimmten Grades $2n$

$$0 = y - \frac{2h\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

vorgelegt war und nachdem $\mathrm{d}x$ konstant genommen wurde und während $hh > 1$ ist, ist ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Gemäß der oben gegebenen Regel wird hier die folgende algebraische Gleichung

$$0 = 1 - 2hz^n + z^{2n}$$

entstehen; diese wird zuerst in diese zwei reellen Faktoren aufgelöst

$$0 = \left[z^n - h + \sqrt{hh-1}\right]\left[z^n - h - \sqrt{hh-1}\right].$$

Weil aber h eine positive Größe bezeichnet, setze man

$$h + \sqrt{hh-1} = a^n \quad \text{und} \quad h - \sqrt{hh-1} = b^n,$$

sodass $ab = 1$ ist; und daher wird diese Gleichung

$$0 = (z^n - a^n)(z^n - b^n)$$

entstehen. Alle trinomialen reellen Faktoren des ersten Faktors $z^n - a^n$ sind in dieser Form

$$aa - 2az\cos A\frac{2k}{n}\pi + zz$$

enthalten, des zweiten $z^n - b^n$ aber in dieser Form

$$bb - 2bz\cos A\frac{2k}{n}\pi + zz;$$

und man wird alle Faktoren haben, wenn in jeder der beiden Formen anstelle von $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, etc nicht größer als n

gesetzt werden. Aus diesen bekannten Faktoren berechnet man deshalb, dass das gesuchte Integral

$$y = \begin{cases} Ae^{ax} & +Be^{ax\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{2}{n}\pi+\mathfrak{B}\right) \\ & +Ce^{ax\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{4}{n}\pi+\mathfrak{C}\right) \\ & +De^{ax\cos A\frac{6}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{6}{n}\pi+\mathfrak{D}\right)+\text{etc} \\ +\alpha e^{bx} & +\beta e^{bx\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{2}{n}\pi+\mathfrak{b}\right) \\ & +\gamma e^{bx\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{4}{n}\pi+\mathfrak{c}\right) \\ & +\delta e^{bx\cos A\frac{6}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{6}{n}\pi+\mathfrak{d}\right)+\text{etc} \end{cases}$$

Q.E.I.

PROBLEM VI

§44 Wenn diese Differentialgleichung unbestimmten Grades

$$0 = y + \frac{2h\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} - \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

vorgelegt war, ist, nachdem das Element $\mathrm{d}x$ konstant genommen wurde, ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Die algebraische Gleichung, die nach den Vorschriften entsteht,

$$0 = 1 + 2hz^n - z^{2n},$$

wird zuerst in diese zwei reelle Faktoren aufgelöst

$$0 = \left[h + \sqrt{hh+1} - z^n\right]\left[-h + \sqrt{hh+1} + z^n\right].$$

Es werde, was wegen der positiven Größe h immer gemacht werden kann,

$$\sqrt{hh+1} + h = a^n \quad \text{und} \quad \sqrt{hh+1} - h = b^n,$$

sodass $ab = 1$ wird; und daher wird diese Gleichung entstehen

$$0 = (a^n - z^n)(b^n + z^n).$$

Die reellen trinomialen Faktoren des ersten Faktors $a^n - z^n$ sind alle in dieser Form

$$aa - 2az\cos A\frac{2k}{n}\pi + zz$$

enthalten, des zweiten aber in dieser

$$bb - 2bz\cos A\frac{2k-1}{n}\pi + zz,$$

und man wird alle Faktoren haben, wenn in der ersten anstelle von $2k$ alle geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, etc, in der zweiten aber anstelle von $2k-1$ alle ungeraden 1, 3, 5, 7, etc, die die Zahl n nicht übersteigen, nacheinander eingesetzt werden. Aus diesen bekannten Faktoren wird das gesuchte Integral berechnet

$$y = \begin{cases} Ae^{ax} & +Be^{ax\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) \\ & +Ce^{ax\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) \\ & +De^{ax\cos A\frac{6}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{6}{n}\pi + \mathfrak{D}\right) + \text{etc} \\ & +\alpha e^{bx\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{a}\right) \\ & +\beta e^{bx\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) \\ & +\gamma e^{bx\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) + \text{etc} \end{cases}$$

Q.E.I.

PROBLEM VII

§45 Wenn diese Differentialgleichung des unbestimmten Grades $2n$

$$0 = y - \frac{2n\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} - \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^{2n}},$$

vorgelegt war, in welcher das Element $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt worden ist, ist ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Durch die oben gegebene Regel zu machende Substitution entsteht diese algebraische Gleichung der Ordnung $2n$:

$$0 = 1 - 2hz^n - z^{2n},$$

die zuerst in diese zwei reellen Faktoren aufgeteilt wird

$$0 = \left[-h + \sqrt{hh+1} - z^n\right]\left[h + \sqrt{hh+1} + z^n\right].$$

Wegen der positiven Größe h setze man

$$\sqrt{hh+1} + h = a^n \quad \text{und} \quad \sqrt{hh+1} - h = b^n,$$

sodass $ab = 1$ ist. Und man wird die folgende aufzulösende Gleichung haben

$$0 = (a^n + z^n)(b^n - z^n),$$

wobei alle trinomialen Faktoren des ersten Faktors $a^n + z^n$ in dieser Form

$$aa - 2az\cos A\frac{2k-1}{n}\pi + zz$$

enthalten sind, des zweiten aber in dieser

$$bb - 2bz\cos A\frac{2k}{n}\pi + zz;$$

und man wird alle Faktoren haben, wenn in jener Form nacheinander alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, etc anstelle von $2k-1$ gesetzt werden, in dieser aber anstelle von $2k$ alle geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, etc nicht größer als n. Aus diesen Faktoren wird deshalb das gesuchte und vollständige Integral berechnet

$$y = \left\{\begin{array}{ll} & Ae^{ax\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{A}\right) \\ & +Be^{ax\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) \\ & +Ce^{ax\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(ax\sin A\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) + \text{etc} \\ +\alpha e^{bx} & +\beta e^{bx\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) \\ & +\gamma e^{bx\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) \\ & +\delta e^{bx\cos A\frac{6}{n}\pi}\sin A\left(bx\sin A\frac{6}{n}\pi + \mathfrak{d}\right) + \text{etc.} \end{array}\right.$$

Q.E.I.

Problem VIII

§46 Wenn diese Differentialgleichung unbestimmten Grades

$$0 = y + \frac{2h\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2n} y}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

vorgelegt war, und nachdem das Element $\mathrm{d}x$ als konstant gesetzt wurde und während $hh < 1$ ist, ist ihr vollständiges Integral zu finden.

LÖSUNG

Die algebraische Gleichung der Ordnung $2n$, die daher entsteht, ist

$$0 = 1 + 2hz^n + z^{2n};$$

um all deren reelle trinomiale Faktoren zu finden, nehme man im Kreis, dessen Radius gleich 1 ist, den Bogen ω, dessen Kosinus gleich h sei, sodass $h = \cos A\omega$ ist. Nachdem dieser Bogen gefunden wurde, wird jeder einzelne trinomiale Faktor in dieser Form enthalten sein

$$1 - 2z\cos A\frac{k\pi - \omega}{n} + zz,$$

indem man anstelle von k alle ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ..., $(2n-1)$ einsetzt, sodass die Anzahl dieser Faktoren n sein wird, wie es die Anzahl der Dimensionen erfordert. Aus diesen bekannten Faktoren wird man also nach den gegebenen Vorschriften das gesuchte Integral der vorgelegten Gleichung finden:

$$y = \begin{cases} \quad \alpha e^{x\cos A\frac{\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{\pi-\omega}{n} + \mathfrak{a}\right) \\ + \quad \beta e^{x\cos A\frac{3\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{3\pi-\omega}{n} + \mathfrak{b}\right) \\ + \quad \gamma e^{x\cos A\frac{5\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{5\pi-\omega}{n} + \mathfrak{c}\right) \\ + \quad \text{etc} \\ + \quad \nu e^{x\cos A\frac{(2n-1)\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{(2n-1)\pi-\omega}{n} + \mathfrak{n}\right). \end{cases}$$

Die Anzahl dieser das Integral festsetzenden Glieder ist natürlich n, und daher ist die Anzahl der beliebigen eingehenden Konstanten $2n$, wie es der Grad der vorgelegten Differentialgleichung verlangt. Q.E.I.

PROBLEM IX

§47 Während wiederum $hh < 1$ wird, wenn diese Differentialgleichung des unbestimmten Grades $2n$

$$0 = y - \frac{2h\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2n} y}{\mathrm{d}x^{2n}},$$

vorgelegt war, ist, nachdem das Element $\mathrm{d}x$ konstant genommen wurde, ihr vollständiges Integral zu finden.

LÖSUNG

Die algebraische Gleichung, die nach den gegebenen Vorschriften daher abgeleitet wird, ist

$$0 = 1 - 2hz^n + z^{2n};$$

die einzelnen trinomialen Faktoren von welcher, deren Anzahl n ist, in dieser allgemeinen Form enthalten ist

$$1 - 2z\cos A\frac{k\pi - \omega}{n} + zz,$$

wenn anstelle von k nacheinander alle geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, etc bis hin zu $2n$ inklusive eingesetzt werden. Es bezeichne hier aber wie zuvor ω den Bogen des Kreises, dessen Kosinus h ist, der wegen $h < 1$ immer angegeben werden kann, sodass $h = \cos A\omega$ ist. Nachdem aber alle Faktoren der Gleichung

$$0 = 1 - 2hz^n + z^{2n}$$

bekannt geworden sind, wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$y = \begin{cases} & \alpha e^{x\cos A\frac{2\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{2\pi-\omega}{n} + \mathfrak{a}\right) \\ + & \beta e^{x\cos A\frac{4\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{4\pi-\omega}{n} + \mathfrak{b}\right) \\ + & \gamma e^{x\cos A\frac{6\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{6\pi-\omega}{n} + \mathfrak{c}\right) \\ + & \delta e^{x\cos A\frac{8\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{8\pi-\omega}{n} + \mathfrak{d}\right) \\ + & \text{etc} \\ + & \nu e^{x\cos A\frac{2n\pi-\omega}{n}} \sin A\left(x\sin A\frac{2n\pi-\omega}{n} + \mathfrak{n}\right) \end{cases}$$

sein. Es gehen nämlich in diesen Ausdruck $2n$ beliebige Konstanten ein. Q.E.I.

PROBLEM X

§48 Wenn diese Differentialgleichung unbestimmten Grades

$$0 = y \pm \frac{2\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

vorgelegt war, ist, in welcher das Differential $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt worden ist, ihr Integral zu finden.

LÖSUNG

Die algebraische Gleichung, die daher gebildet werde, ist

$$0 = 1 \pm 2z^n + z^{2n} = (1 \pm z^n)^2;$$

weil diese ein Quadrat ist, werden alle ihre Faktoren Quadrate sein; für das obere Vorzeichen enthält diese Form

$$(1 - 2z\cos A\frac{2k-1}{n}\pi + zz)^2$$

alle Faktoren; für das untere Vorzeichen aber diese Form

$$(1 - 2z\cos A\frac{2k}{n}\pi + zz)^2.$$

Aus diesen bekannten Faktoren wird man für das untere Vorzeichen oder aus der Gleichung

$$0 = y - \frac{2\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

das vollständige Integral finden.

$$y = \begin{cases} Ae^x & +Be^{x\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) \\ & +Ce^{x\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) \\ & +\text{etc} \\ +\alpha xe^x & +\beta xe^{x\cos A\frac{2}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{2}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) \\ & +\gamma xe^{x\cos A\frac{4}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{4}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) \\ & +\text{etc.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Gleichung

$$0 = y + \frac{2\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^n} + \frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}y}{\mathrm{d}x^{2n}}$$

wird

$$y = \begin{cases} \quad Ae^{x\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{A}\right) \\ + \quad Be^{x\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{B}\right) \\ + \quad Ce^{x\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{C}\right) \\ + \quad \text{etc} \\ + \quad \alpha x e^{x\cos A\frac{1}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{1}{n}\pi + \mathfrak{a}\right) \\ + \quad \beta x e^{x\cos A\frac{3}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{3}{n}\pi + \mathfrak{b}\right) \\ + \quad \gamma x e^{x\cos A\frac{5}{n}\pi}\sin A\left(x\sin A\frac{5}{n}\pi + \mathfrak{c}\right) \\ + \quad \text{etc} \end{cases}$$

sein. Q.E.I.

§49 Aus diesen erwähnten Beispielen durchschaut man überaus, wie alle Differentialgleichungen irgendeines Grades, die natürlich in dieser Form

$$0 = Ay + \frac{B\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{C\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{D\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{E\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc}$$

enthalten sind, während die Buchstaben A, B, C, D, etc konstante Koeffizienten bezeichnen, behandelt werden müssen, um deren vollständige Integrale zu finden. Die einzige nicht geringe Schwierigkeit besteht in der Auflösung der algebraischen Gleichungen in entweder einfache oder trinomiale reelle Faktoren; diese können wir aber bei dieser Aufgabe, die ja von der Algebra abhängt, mit Recht als gegeben annehmen. Aber in der Tat kann dieselbe Methode auch bei Gleichungen dieser Art angenommen werden, die man daraus bildet, dass alle ihre Wurzeln angegeben werden können. Wir werden diesen Gebrauch also an einem einzigen Beispiel aufzeigen, den wir vielleicht bei anderer Gelegenheit dieser Integration von Differentialgleichungen unendlichen Grades genauer erörtern werden.

Problem XI

§50 Wenn diese ins unendliche laufende Differentialgleichung

$$0 = y - \frac{\mathrm{dd}y}{2\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^4y}{24\mathrm{d}x^4} - \frac{\mathrm{d}^6y}{720\mathrm{d}x^6} + \frac{\mathrm{d}^8y}{40320\mathrm{d}x^8} - \text{etc}$$

vorgelegt war, in welcher das Differential $\mathrm{d}x$ konstant gesetzt werde, ist ihr vollständiges Integral zu finden.

LÖSUNG

Nachdem 1 für y und z^k für das Differential des entsprechenden Grades $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ geschrieben wurde, wird diese ins unendliche laufende Gleichung entstehen

$$0 = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{z^8}{1 \cdot 2 \cdots 8} - \text{etc},$$

die mit dieser übereinstimmt

$$0 = \cos Az.$$

Alle Wurzeln dieser Gleichung sind also Bögen des Kreises vom Radius gleich 1, deren Kosinus verschwinden. Deswegen werden alle möglichen Werte von z die folgenden sein:

$$\pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}\pi, \quad \pm\frac{5}{2}\pi, \quad \pm\frac{7}{2}\pi, \quad \pm\frac{9}{2}\pi, \quad \text{etc.}$$

Nachdem also die Wurzeln und die einfachen Teiler einer Gleichung bekannt geworden sind, die alle reell sind, wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung

$$y = \alpha e^{\frac{\pi x}{2}} + \mathfrak{a} e^{-\frac{\pi x}{2}} + \beta e^{\frac{3\pi x}{2}} + \mathfrak{b} e^{-\frac{3\pi x}{2}} + \gamma e^{\frac{5\pi x}{2}} + \mathfrak{c} e^{-\frac{5\pi x}{2}} + \delta e^{\frac{7\pi x}{2}} + \mathfrak{d} e^{-\frac{7\pi x}{2}} + \dots$$

(bis ins Unendliche fortgesetzt)

sein. Und jeder einzelne Term getrennt genommen, oder mehrere zusammen, werden ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung geben.

Q.E.I.